Tree Automata and Applications: TD7
Relations reconnaissables et WSkS

Emile Contal
http://econtal.perso.math.cnrs.fr/teaching

November 15, 2013

1 Relations reconnaissables

Exercise 1. Soit R un ensemble reconnaissable d'arbres.

1. Montrer que, si tous les symboles sont d'arité au plus 1, alors $\{(t, g(t)) \mid t \in R\}$ est reconnaissable.
2. Généraliser : montrer que $\{(t, g(t)) \mid t \in R\}$ est reconnaissable ssi $\forall u, \forall p \in Pos(u)$, $\{t_1 \mid \exists t_2.u[f(t_1, t_2)]_p \in R\}$ est fini ou $\{t_2 \mid \exists t_1.u[f(t_1, t_2)]_p \in R\}$ est fini.

Exercise 2. Soient R_1, R_2 deux relations binaires reconnaissables, montrer que R_1^{-1} et $R_1 \circ R_2$ sont reconnaissables.

Donner un exemple montrant que $R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$ n'est pas nécéssairement reconnaissable.

Exercise 3. Montrer que le produit de deux relations reconnaissables est reconnaissable, mais que l'inverse est faux.

2 MSOL

Exercise 4. Montrer que la relation $\{(p, 1 \cdot p) \mid p \in \{1, \ldots, k\}^*\}$ n'est pas définissable en WSkS.

Exercise 5. Montrer que la relation "descendant" (ordre préfixe) est définissable en WSkS (resp. en WMSO pour les arbres d'arité non bornée).

Exercise 6. Montrer que L reconnaissable implique L définissable, dans le cas des automates d'arbres d'arité non bornée.

Exercise 7.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, soit $n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$ avec $b_k \neq 0$ sa représentation binaire. On représente n par l'ensemble $S_n = \{1^i \mid b_i \neq 0\}$. Montrer que les prédicats $X = S_n$, $\exists n.X = S_n$, $\exists n, m.X = S_n \wedge Y = S_m \wedge Z = S_{n+m}$ sont définissables en WSkS pour $k \geq 1$.

   En déduire que la théorie du premier ordre des entiers avec l'addition et l'égalité est décidable. (Formellement : le seul symbole de prédicat est $=$, les symboles de fonction sont les constantes entières (symboles d'arité 0) et le seule symbole de fonction est l'adition (binaire). La théorie est l'ensemble des formules du premier ordre qui sont valides dans les entiers avec l'interprétation habituelle des opérations).

2. Donner un (autre) codage des entiers dans WS2S tel que les prédicats $x = c$ (où $c \in \mathbb{N}$), $x = y \times z$ sont définissables en WSkS et tel que l'image du codage est elle-même définissable en WS2S.

   En déduire que la théorie du premier ordre des entiers avec la multiplication et l'égalité (mais pas l'addition !) est décidable.

Exercise 8. Montrer qu'il existe un ordre total sur $\{1, 2\}^*$ définissable en WS2S.

En déduire que, pour toute formule ϕ à une variable libre du premier ordre, on peut construire une formule Φ qui exprime qu'il existe une infinité de mots satisfaisant ϕ.