Tree Automata and Applications: TD8
Propositional Dynamic Logic

Emile Contal
http://econtal.perso.math.cnrs.fr/teaching

November 22, 2013

Definition 1. On rappelle la *syntaxe* des formules ϕ de PDL :

$$\phi ::= a \mid \top \mid \neg\phi \mid \phi \vee \phi \mid \langle\pi\rangle\,\phi \qquad \text{(positions)}$$
$$\pi ::= \downarrow \mid \rightarrow \mid \phi^{-1} \mid \pi;\pi \mid \pi + \pi \mid \pi^* \mid \phi? \qquad \text{(chemins)}$$

Definition 2. Soit $\mathfrak{M} = (W, \mathsf{Child}, \mathsf{NextSibling}, (P_a)_{a\in A})$ une structure d'arbre où W est l'ensemble des positions, $\mathsf{Child} = \big\{(p, p.i) \mid p, p.i \in W\big\}$ et $\mathsf{NextSibling} = \big\{(p.i, p.(i+1)) \mid p.i, p.(i+1) \in W\big\}$. On définit la *sémantique* d'une formule de positions dans $\mathfrak{M}$ par un ensemble de positions $[\![\phi]\!]$ et la sémantique d'une formule de chemins dans $\mathfrak{M}$ par une relation binaire $[\![\pi]\!]$ de la façon suivante :

$$[\![a]\!] = \{w \in W \mid P_a(w)\} \qquad [\![\downarrow]\!] = \mathsf{Child}$$
$$[\![\top]\!] = W \qquad [\![\rightarrow]\!] = \mathsf{NextSibling}$$
$$[\![\neg\phi]\!] = W \setminus [\![\phi]\!] \qquad [\![\phi^{-1}]\!] = [\![\pi]\!]^{-1}$$
$$[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \cup [\![\phi_2]\!] \qquad [\![\pi_1;\pi_2]\!] = [\![\pi_1]\!] \mathbin{⨾} [\![\pi_2]\!]$$
$$[\![\langle\pi\rangle\,\phi]\!] = [\![\pi]\!]^{-1}([\![\phi]\!]) \qquad [\![\pi_1 + \pi_2]\!] = [\![\pi_1]\!] \cup [\![\pi_2]\!]$$
$$[\![\pi^*]\!] = [\![\pi]\!]^*$$
$$[\![\phi?]\!] = \mathsf{Id}_{[\![\phi]\!]}$$

Une structure $\mathfrak{M}$ est un *modèle* de ϕ si sa racine est dans $[\![\phi]\!]$.

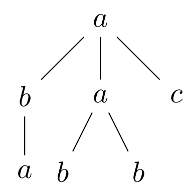
On s'autorise également l'usage des opérateurs,

$$\bot = \neg\top \qquad \phi_1 \wedge \phi_2 = \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \qquad [\pi]\phi = \neg\,\langle\pi\rangle\,\neg\phi\ ,$$

ainsi que,

$$\uparrow\, = \,\downarrow^{-1} \quad \leftarrow\, = \,\rightarrow^{-1} \quad \mathsf{root} = [\uparrow]\bot \quad \mathsf{leaf} = [\downarrow]\bot \quad \mathsf{first} = [\leftarrow]\bot \quad \mathsf{last} = [\rightarrow]\bot\ .$$

Exercise 1. Soit $\mathfrak{M}$ la structure associée à l'arbre :



Quelles sont les formules dont $\mathfrak{M}$ est un modèle ?

1. $\phi_1 = \neg a \vee \langle\downarrow\rangle \Big(\neg \langle\leftarrow\rangle \top \wedge b \wedge \langle\rightarrow^*\rangle (c \wedge \neg \langle\rightarrow\rangle \top)\Big)$
2. $\phi_2 = \neg a \vee \langle\downarrow\rangle \Big(\neg \langle\leftarrow\rangle \top \wedge b \wedge \langle(\rightarrow; c?)^*\rangle (\neg \langle\rightarrow\rangle \top)\Big)$
3. $\phi_3 = \langle(a?;\downarrow)^*\rangle (a \wedge \neg \langle\downarrow\rangle \top)$

Exercise 2. Montrer les équivalences suivantes (pour toute interprétation) :

$$\begin{array}{rcl}
(\alpha;\beta)^{-1} & = & \beta^{-1};\alpha^{-1} \\
\langle\alpha;\beta\rangle \phi & = & \langle\alpha\rangle \langle\beta\rangle \phi \\
\langle\alpha+\beta\rangle \phi & = & (\langle\alpha\rangle \phi) \vee (\langle\beta\rangle \phi) \\
\langle\pi^*\rangle \phi & = & \phi \vee \langle\pi;\pi^*\rangle \phi \\
\langle\phi_1?\rangle \phi_2 & = & \phi_1 \wedge \phi_2
\end{array}$$

Exercise 3. Donner une traduction complète de PDL en MSO (dans le cas des automates d'arité non bornée).

Exercise 4. Construire un automate bi-directionnel alternant correspondant à la formule de PDL ϕ_3 de l'exercice 1.