Apprentissage statistique: TD2
Apprentissage en Ligne et Théorie des Jeux

Emile Contal
http://econtal.perso.math.cnrs.fr/teaching

11 janvier 2016

Exercice 1.

1. **(Exponential Weighted Average)** On se donne $\mathcal{C}$ une famille de N experts proposant à chaque temps t des prédictions $\{\widehat{y}_{t,i}, 1 \le i \le N\}$. Soit $\ell : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ une fonction de perte, convexe en son premier argument.

   Fixons l'horizon T. Nous cherchons à minimiser R_T, notre regret par rapport au meilleur expert :

   $$R_T = \sum_{t=1}^{T} \ell(\widehat{y}_t, y_t) - \min_i \sum_{t=1}^{T} \ell(\widehat{y}_{t,i}, y_t)$$

   où $(\widehat{y}_t)_{t \le T}$ sont les prédictions de notre stratégie.

   On rappelle l'algorithme EWA de paramètre $\eta > 0$:

   Algorithm 1: Exponential Weighted Average

   $\forall i \le N$, $w_{1,i} \leftarrow 1$
   for $t = 1, \dots, T$ **do**
   $\quad \widehat{y}_t \leftarrow \dfrac{\sum_{i=1}^N w_{t,i} \widehat{y}_{t,i}}{\sum_{i=1}^N w_{t,i}}$
   $\quad w_{t+1,i} \leftarrow w_{t,i} \exp\Big(-\eta \ell(\widehat{y}_{t,i}, y_t) \Big)$

   (a) Soit $\Phi_t = \log \sum_{i=1}^N w_{t,i}$. Montrer que pour tout $1 < t \le T$, on a $\Phi_t - \Phi_{t-1} \le -\eta \ell(\widehat{y}_t, y_t) + \frac{\eta^2}{8}$.
   Indice : voir les moyennes pondérées comme des espérances, et utiliser l'inégalité de Hoeffding prouvée au TD précédent.

   (b) Montrer que $\Phi_T - \Phi_0 \ge -\eta \min_i \sum_{t=1}^T \ell(\widehat{y}_{t,i}, y_t) - \log N$.

   (c) En déduire une borne sur R_T.

   (d) Quel choix de η préconisez vous ?

2. **(Doubling Trick)** L'horizon T est maintenant supposé fini mais inconnu. Soient $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la partition de $\mathbb{R}^+$ définie par les intervalles $I_k = [2^k, 2^{k+1}-1]$. On considère l'Algorithme 1 de paramètre η_k qui dépend de l'intervalle de temps I_k. On note L_{I_k} la perte subie sur l'intervalle I_k.

   (a) Donner une majoration du regret sur I_k.

   (b) On pose $n = \lceil \log_2(T+1) \rceil$. Déduire une majoration de $L_T = \sum_{k=0}^{n} L_{I_k}$.

   (c) Choisissez η_k de sorte à optimiser la majoration précédente, puis montrer pour tout T :

$$R_T \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{T\log N} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\log N}\,.$$

Exercice 2. (Minimisation du Regret et Théorie des Jeux)
On modélise un jeu à somme nulle en forme normale entre deux joueurs par la matrice des gains $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, où le premier joueur choisit parmi m actions et le deuxième parmi n actions. Nous étudions le gain espéré des joueurs lorsque leurs stratégies sont aléatoires. La stratégie du premier joueur est définie par $\mathbf{p}$ une distribution sur $\{1,\dots,m\}$ et celle du deuxième joueur par $\mathbf{q}$ une distribution sur $\{1,\dots,n\}$. Le gain espéré du premier joueur est alors $\mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q}$ et celui du deuxième joueur $-\mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q}$. Nous souhaitons prouver le théorème du minimax de von Neumann :

$$\min_{\mathbf{p}}\max_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q} = \max_{\mathbf{q}}\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q}\,.$$

1. Montrer que $\min_{\mathbf{p}}\max_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{q}}\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q}$.

2. Pour montrer l'autre inégalité, on considère le cadre d'apprentissage en ligne suivant : à chaque itération t l'algorithme choisit $\mathbf{p}_t$ et paye un coût $\mathbf{p}_t^\top\mathbf{M}\mathbf{q}_t$, où $\mathbf{q}_t$ est donné par un adversaire : $\mathbf{q}_t \in \operatorname{argmax}_{\mathbf{q}} \mathbf{p}_t^\top\mathbf{M}\mathbf{q}$. On rappelle la définition du regret:

$$R_T = \sum_{t=1}^{T} \mathbf{p}_t^\top\mathbf{M}\mathbf{q}_t - \min_{\mathbf{p}}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q}_t\,,$$

   ainsi que l'existence d'algorithmes tels que $R_T = o(T)$.

   (a) Montrer que $\min_{\mathbf{p}}\max_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q} \leq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{p}_t^\top\mathbf{M}\mathbf{q}_t$.

   (b) Montrer que $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{p}_t^\top\mathbf{M}\mathbf{q}_t \leq \max_{\mathbf{q}}\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q} + \frac{R_T}{T}$.

   (c) En déduire que $\min_{\mathbf{p}}\max_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q} \leq \max_{\mathbf{q}}\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^\top\mathbf{M}\mathbf{q}$.